京都大学編入学試験物理工学科専門　材料力学

京都大学高専会 (http://kyoto-u.jpn.org/)　k_s

2007 年 11 月 21 日

第 1 版　平成 19 年 11 月 21 日

材料力学は，どれも京大の教科書（柴田ほか：材料力学の基礎，培風館）の抜粋だったりして・・・

平成 14 年度

両端固定丸棒のねじり，モーメントを受ける単純支持はり（難易度：標準）

1.

トルクが作用している点より左の部分に作用するモーメントを T_1，右の部分に作用するモーメントを T_2 とすると，偶力の和より

$$T_1 + T_2 = T \tag{1}$$

C 点ではねじれ角が等しいから，断面 2 次極モーメント $I_p = \pi d^4/32$ を用いてねじれ角 φ は

$$\varphi = \frac{a}{G}\frac{T_1}{I_p} = \frac{b}{G}\frac{T_2}{I_p} \tag{2}$$

となる。したがって，

$$T_1 = \frac{bT}{L}, \qquad T_2 = \frac{aT}{L} \tag{3}$$

となるからねじれ角は次式となる。

$$\varphi = \frac{abT}{GI_pL} = \frac{32abT}{\pi G d^4 L} \tag{4}$$

2. (1)

$$R_A + R_B = 0 \tag{5}$$

$$M_A + R_A L - M_B = 0 \tag{6}$$

より

$$R_A = \frac{M_B - M_A}{L} = -R_B \ (\geqq 0) \tag{7}$$

(2)

せん断力 Q_x，曲げモーメント M_x は，A 点より x 離れた位置では，

$$Q_x = R_A \tag{8}$$

$$M_x = M_A + R_A x = M_A + \frac{M_B - M_A}{L} x \tag{9}$$

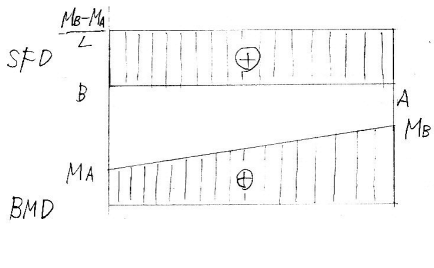

図１　曲げモーメント図とせん断力図

(3)

位置 x でのたわみ角 θ_x，たわみ v_x は，

$$\theta_x = \int \frac{-M_x}{EI} dx = -\frac{1}{EI}\left(M_A x + \frac{M_B - M_A}{2L} x^2 + C_1\right) \tag{10}$$

$$v_x = \int \theta_x dx = -\frac{1}{EI}\left(\frac{M_A}{2} x^2 + \frac{M_B - M_A}{6L} x^3 + C_1 x + C_2\right) \tag{11}$$

境界条件として $x = 0, x = L$ で $v_x = 0$ を用いると,

$$C_2 = 0, \qquad C_1 = -\frac{2M_A + M_B}{6} L \tag{12}$$

よってたわみ v_x は次のようになる。

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{1}{EI}\left(\frac{M_A}{2} x^2 + \frac{M_B - M_A}{6L} x^3 - \frac{2M_A + M_B}{6} Lx\right) \\ &= \frac{Lx}{6EI}\left\{(2M_A + M_B) - 3M_A \frac{x}{L} - (M_B - M_A)\frac{x^2}{L^2}\right\} \end{aligned} \tag{13}$$

(4)

$M_A = M_B$ のときの v_x は,

$$v_x = \frac{M_A}{2EI}\left(Lx - x^2\right) \tag{14}$$

最大のたわみは中央（$x = L/2$）に生ずるから,

$$v_{\max} = \frac{M_A L^2}{8EI} \tag{15}$$

平成 15 年度

圧肉円筒の基礎式（難易度：難）

知らないと全く歯が立ちません。この年はほとんどの人が手付かずだったでしょう。悪問です。むしろ弾性体力学の範囲では・・・

1. (1)

図 2 のようになる。

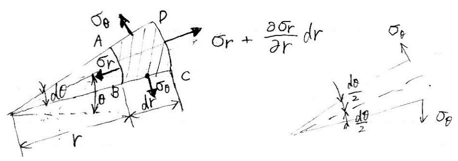

図 2　曲げモーメント図とせん断力図

(2)

図の半径方向の力の釣り合いより

AB 間の力 +AD，BC 間の力 =DC 間の力

$$\sigma_r r d\theta + 2\sigma_\theta dr \sin\frac{d\theta}{2} = \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}dr\right)(r+dr)d\theta \tag{16}$$

$d\theta$ が小さいことから，$\sin(d\theta/2) \fallingdotseq d\theta/2$ として計算すれば，

$$\sigma_r r + \sigma_\theta dr = \sigma_r r + \sigma_r dr + r d\sigma_r + d\sigma_r dr \tag{17}$$

高次の微小項を無視して，整理すれば

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{18}$$

となる。

(3)

問題本文中の (3) 式に (2) 式を代入し，さらにこれを (1) 式に代入して係数 $E/\{(1+\nu)(1-2\nu)\}$ で割れば，

$$\frac{d}{dr}\left\{(1-\nu)\frac{du}{dr}+\nu\frac{u}{r}+\nu\varepsilon_z\right\}$$
$$+\frac{1}{r}\left[\left\{(1-\nu)\frac{du}{dr}+\nu\frac{u}{r}+\nu\varepsilon_z\right\}-\left\{(1-\nu)\frac{u}{r}+\nu\frac{du}{dr}+\nu\varepsilon_z\right\}\right]=0 \tag{19}$$

これより，

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=0 \tag{20}$$

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right)=0 \tag{21}$$

となり，応力のつり合い方程式（**ナビアの方程式**という）が求まる。

(4)

問題中 (4) 式を積分して

$$\frac{du}{dr}+\frac{u}{r}=C \tag{22}$$

$$\frac{d}{dr}(ru)=Cr \tag{23}$$

これをさらに積分して

$$ru=\frac{Cr^2}{2}+C_2=C_1r^2+C_2 \quad \left(C_1=\frac{C}{2}\right) \tag{24}$$

(5)

境界条件は,

$$r=r_a\text{で}\sigma_r=-p_a, \qquad r=r_b\text{で}\sigma_r=-p_b \tag{25}$$

である。

まず，u を問題文中 (2) 式に代入して，それを (3) 式に代入し境界条件を適用すれば,

$$C_1=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\frac{{r_a}^2\,p_a-{r_b}^2\,p_b}{{r_b}^2-{r_a}^2}-\nu\varepsilon_z \tag{26}$$

$$C_2 = \frac{1+\nu}{E}\frac{{r_a}^2\,{r_b}^2}{{r_b}^2-{r_a}^2}\,(p_a-p_b) \tag{27}$$

$$\therefore\quad \sigma_r = \frac{1}{{r_b}^2-{r_a}^2}\left\{{r_a}^2\left(1-\frac{{r_b}^2}{r^2}\right)p_a-{r_b}^2\left(1-\frac{{r_a}^2}{r^2}\right)p_b\right\} \tag{28}$$

となる。

平成 16 年度

平等強さの棒，不静定はり（難易度：1 標準，2 やや難）

1,2 ともにそこまで難しくはないのですが，試験時間中に解くにはかなり厳しい出題内容となっています。

1. (1)

下端での釣り合いを考えると，

$$\sigma S_0 = Mg \tag{29}$$

となり，棒に生ずる応力 σ は，

$$\sigma = \frac{Mg}{S_0} \tag{30}$$

一方，棒の伸び λ は，各横断面上の応力が全長にわたり一定であるから

$$\lambda = \varepsilon l = \frac{\sigma}{E}l = \frac{Mgl}{S_0E} \tag{31}$$

となる。

(2)

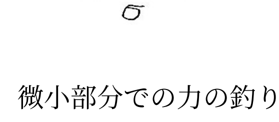

図 3　微小部分での力の釣り合い

図 3 のように位置 x での微小部分 dx での力の釣り合いを考えると，

$$\sigma(S+dS) = \sigma S + S\rho g dx \tag{32}$$

よって,

$$\sigma dS = S\rho g dx$$

$$\frac{dS}{S} = \frac{\rho g}{\sigma} dx \tag{33}$$

両辺を積分すると

$$\log S = \frac{\rho g}{\sigma} x + C' \tag{34}$$

$$S = Ce^{\frac{\rho g}{\sigma} x} \tag{35}$$

境界条件は $x = 0$ のとき $S = S_0$ だから

$$C = S_0 \tag{36}$$

となるから断面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= S_0 e^{\frac{\rho g}{\sigma} x} \\ &= S_0 e^{\frac{\rho S_0 g}{Mg} x} = S_0 e^{\frac{\rho S_0}{M} x} \end{aligned} \tag{37}$$

となる。

2.

分布荷重 $w(x)$ は,

$$w(x) = \frac{2W}{L^2} x \tag{38}$$

となる。たわみ角 $\theta(x)$, たわみ $y(x)$ とすると,

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x) = \frac{2W}{L^2} x \tag{39}$$

となり, これを積分すると,

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2W}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) = -Q(x) \tag{40}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2W}{L^2}\left(\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2\right) = -M(x) \tag{41}$$

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{2W}{EIL^2}\left(\frac{x^4}{24} + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3\right) \tag{42}$$

$$y(x) = \frac{2W}{EIL^2}\left(\frac{x^5}{120} + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4\right) \tag{43}$$

となる。境界条件は,

$$
\begin{aligned}
x = 0 \text{ で } y = 0, dy/dx = 0 \\
x = L \text{ で } y = 0, dy/dx = 0
\end{aligned}
\tag{44}
$$

よって,

$$C_1 = -\frac{3L^2}{20}, \qquad C_2 = \frac{L^3}{30}, \qquad C_3 = C_4 = 0 \tag{45}$$

これより，せん断力 $Q(x)$，曲げモーメント $M(x)$，たわみ角 $\theta(x)$，たわみ $y(x)$ は,

$$Q(x) = -\frac{W}{10L^2}\left(10x^2 - 3L^2\right) \tag{46}$$

$$M(x) = -\frac{W}{30L^2}\left(10x^3 - 9L^2x + 2L^3\right) \tag{47}$$

$$\theta(x) = \frac{Wx}{60EIL^2}(L-x)\left(4L^2 - 5Lx - 5x^2\right) \tag{48}$$

$$y(x) = \frac{Wx^2}{60EIL^2}(L-x)^2\,(2L+x) \tag{49}$$

(1)

$$R_A = -Q(0) = \frac{3W}{10}, \qquad R_B = -Q(L) = \frac{7W}{10} \tag{50}$$

$$M_A = M(0) = -\frac{WL}{15}, \qquad M_B = M(L) = -\frac{WL}{10} \tag{51}$$

(2)

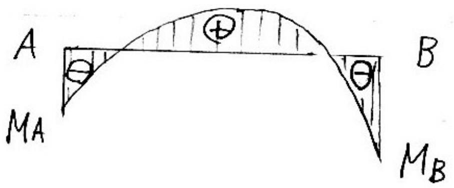

図 4　曲げモーメント図

(3)

$$y(x) = \frac{Wx^2}{60EIL^2}(L-x)^2(2L+x) \tag{52}$$

平成 17 年度

曲率を持つはりとカスティリアーノの定理（難易度：標準）

始めて見ると難しそうに見えますが，実際にはたいしたことはないです。曲げとねじりをきちんと理解できていれば解ける問題です。あとは，カスティリアーノの定理に当てはめるだけです。

(1)

曲げモーメント：$M = Pr\sin\phi$

ねじりモーメント：$T = Pr(1-\cos\phi)$

(2)

最大主応力は軸の表面に生じる。$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は，

$$\sigma_x = \frac{M}{Z} = \frac{32M}{\pi d^3} \tag{53}$$

$$\sigma_y = 0 \tag{54}$$

$$\tau_{xy} = \frac{T}{Z_p} = \frac{16T}{\pi d^3} \tag{55}$$

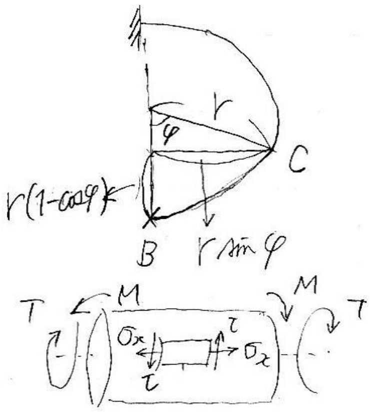

図 5

これらを与式に代入すると，

$$\sigma_{\max} = \frac{16}{\pi d^3}\left(M + \sqrt{M^2+T^2}\right) \tag{56}$$

$$\tau_{\max} = \frac{16}{\pi d^3}\sqrt{M^2+T^2} \tag{57}$$

(3)

$\tau_{\max}$ を τ_a に置きなおして，d について解けば，

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\sqrt{M^2+T^2}}{\pi\tau_a}} \tag{58}$$

(4)

ひずみエネルギー U の公式（導出過程を各自確認しておくこと）は，横弾性係数を G として，

$$U = \frac{1}{2EI}\int_0^{\pi} M^2 dx + \frac{1}{2GI_p}\int_0^{\pi} T^2 dx \tag{59}$$

となる。ここで，

$$dx = r d\phi \tag{60}$$

という幾何学的関係を用いて，

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2EI}\int_0^{\pi} (Pr\sin\phi)^2 r d\phi + \frac{1}{2GI_p}\int_0^{\pi} \{Pr(1-\cos\phi)\}^2 r d\phi \\ &= \frac{P^2r^3}{2EI}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{P^2r^3}{2GI_p}\cdot\frac{3\pi}{2} \end{aligned} \tag{61}$$

(5)

カスティリアーノの定理よりたわみ w は，

$$w = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pr^3}{EI}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{Pr^3}{GI_p}\cdot\frac{3\pi}{2} \tag{62}$$

ここで，縦弾性係数 E と横弾性係数 G との関係はポアソン比 ν を用いて，

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{63}$$

と表せるから（各自確認しておくこと），

$$w = \frac{32Pr^3}{Ed^4}(4+3\nu) \tag{64}$$

となる。

平成 18 年度

熱応力，応力の座標変換（難易度：基本）

1.

温度上昇による棒の伸びが，応力による変形量に等しいと考える。まず，棒が拘束されていないとき，系の温度が $t_1 \to t_2$ に上昇したとき棒の伸び λ は，

$$\lambda = (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)(t_2 - t_1) \tag{65}$$

となる。また，l_1, l_2 部での変形量の和 λ は変形による軸力 P とすると，

$$\lambda = \frac{Pl_1}{A_1E_1} + \frac{Pl_2}{A_2E_2} \tag{66}$$

よって

$$\sigma_1 = -\frac{P}{A_1} = -\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\lambda}{\left(\dfrac{l_1}{A_1E_1} + \dfrac{l_2}{A_2E_2}\right)} \tag{67}$$

$$\sigma_2 = -\frac{P}{A_2} = -\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\lambda}{\left(\dfrac{l_1}{A_1E_1} + \dfrac{l_2}{A_2E_2}\right)} \tag{68}$$

これに λ を代入すると σ_1, σ_2 は次のように求まる。

$$\sigma_1 = -\frac{1}{A_1} \cdot \frac{(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)(t_2 - t_1)}{\left(\dfrac{l_1}{A_1E_1} + \dfrac{l_2}{A_2E_2}\right)} \tag{69}$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{A_2} \cdot \frac{(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)(t_2 - t_1)}{\left(\dfrac{l_1}{A_1E_1} + \dfrac{l_2}{A_2E_2}\right)} \tag{70}$$

2.

一般的な教科書に公式の証明として掲載されているので省略する。

平成 19 年度

はりの 4 点曲げ試験（難易度：標準）

曲げモーメント図および小問 (4) の考察として，3 点曲げに比べて 4 点曲げが有利な理由がわかります。実用性のある良問です。ただし，計算量が多いので受験生にとっては時間との闘いです。

(1)

まず，点 A,A' にかかる反力 $R_A, R_{A'}$ を求める。力の釣り合いより，

$$R_A + R_{A'} = W, \qquad R_A = R_{A'}$$

$$\therefore \quad R_A = R_{A'} = \frac{W}{2} \tag{71}$$

左端からの距離を x とし，x について場合分けして考えると，

(i)　$0 \leqq x \leqq L/3$

$$\begin{cases} \text{せん断力} & Q(x) = R_A = \dfrac{W}{2} \\ \text{曲げモーメント} & M(x) = R_A x = \dfrac{W}{2}x \end{cases} \tag{72}$$

(ii)　$L/3 \leqq x \leqq 2L/3$

$$\begin{cases} \text{せん断力} & Q(x) = R_A - \dfrac{W}{2} = 0 \\ \text{曲げモーメント} & M(x) = \dfrac{W}{2} \cdot \dfrac{L}{3} = \dfrac{WL}{6} \end{cases} \tag{73}$$

(iii)　$2L/3 \leqq x \leqq L$

$$\begin{cases} \text{せん断力} & Q(x) = R_A - \dfrac{W}{2} - \dfrac{W}{2} = -\dfrac{W}{2} \\ \text{曲げモーメント} & M(x) = \dfrac{WL}{6} + \dfrac{WL}{3} - \dfrac{W}{2}x = \dfrac{WL}{2} - \dfrac{W}{2}x \end{cases} \tag{74}$$

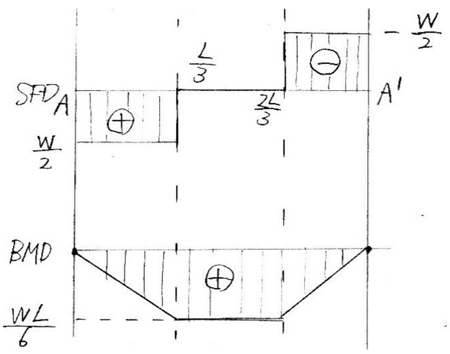

図 6　せん断力図，曲げモーメント図

(2)

最大曲げモーメントは，$M_{\max} = \dfrac{WL}{6}$ なので，断面係数を Z とすれば，

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{Z} = \frac{6M_{\max}}{bh^2} = \frac{WL}{bh^2} \quad (= E\varepsilon_c) \tag{75}$$

(3)

A,P 間のたわみ曲線は $y(x)$ は重ねあわせにより（なぜ，このように重ねあわせができるのか考えてみよ），

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{\frac{W}{2}\left(L - \frac{L}{3}x\right)}{6EI_zL}\left\{\frac{L}{3}\left(2L - \frac{L}{3}\right) - x^2\right\} \\ &\quad + \frac{\frac{W}{2}\left(L - \frac{2L}{3}x\right)}{6EI_zL}\left\{\frac{2L}{3}\left(2L - \frac{2L}{3}\right) - x^2\right\} \\ &= \frac{2WLx}{36EI_zL}\left\{\frac{5L^2}{9} - x^2\right\} + \frac{WLx}{36EI_zL}\left\{\frac{8L^2}{9} - x^2\right\} \end{aligned} \tag{76}$$

いま P 点では $x = L/3$ であるから，

$$y_p = \frac{5WL^3}{324EI_z} = \frac{5WL^3}{27Ebh^3} \tag{77}$$

ところで，曲げモーメント $M(x)$ は PP' 間で一定であるから，点 P と C のひずみ ε_c は等しい。すなわち，

$$\sigma_{\max} = \frac{WL}{bh^2} = E\varepsilon_c \tag{78}$$

これより，

$$y_p = \left(\frac{WL}{Ebh^2}\right)\frac{5L^2}{27h} = \frac{5L^2}{27h}\varepsilon_c \tag{79}$$

(4)

まず，A 点での反力 R_A を求めるために，A' 点周りのモーメントの釣り合いを考えると，

$$R_AL = \left(\frac{W}{2} + \Delta W\right)\frac{2L}{3} + \left(\frac{W}{2} - \Delta W\right)\frac{L}{3} \tag{80}$$

$$\therefore \quad R_AL = \frac{W}{2} + \frac{\Delta W}{3} \tag{81}$$

となる。PP' 間のせん断力 $Q(x)$，曲げモーメント $M(x)$ は

$$\begin{cases} \text{せん断力} & Q(x) = R_A - \left(\dfrac{W}{2} + \Delta W\right) = -\dfrac{2\Delta W}{3} \\ \text{曲げモーメント} & M(x) = \left(\dfrac{W}{2} + \Delta W\right)\dfrac{L}{3} - \dfrac{2\Delta W}{3}x \end{cases} \tag{82}$$

最大曲げモーメント $M_{\max}$ は，

$$M_{\max} = \left(\frac{W}{2} + \Delta W\right)\frac{L}{3} - \frac{2\Delta W}{3}\cdot\frac{L}{3} = \left(\frac{W}{6} + \frac{\Delta W}{9}\right)L \tag{83}$$

よって，曲げ応力の最大値 $\sigma_{\max}$ は，

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{Z} = \frac{\left(\dfrac{W}{6} + \dfrac{\Delta W}{9}\right)L}{\dfrac{bh^2}{6}} = \frac{\left(W + \dfrac{2\Delta W}{3}\right)L}{bh^2} \tag{84}$$

また，荷重点におけるたわみ y_p は (3) で求めたように重ねあわせを用いて，

$$y_p = \frac{L^3}{81Ebh^3}(15W + 2\Delta W) \tag{85}$$

一方，C 点での曲げモーメントは

$$M_c = \frac{WL}{6} \tag{86}$$

であるから，C 点での曲げ応力 σ_c とひずみ ε_c との関係は (2) と同様に，

$$\sigma_c = \frac{WL}{bh^2} = E\varepsilon_c \tag{87}$$

これより，

$$\varepsilon_c = \frac{WL}{Ebh^2} \tag{88}$$

となる。

平成 20 年度

曲げ応力と曲げモーメントの関係（難易度：基礎）

本解答集作成者が受験した年の問題です。私事ですが，前日の夜にホテルで復習した内容でしたのでラッキーでした。ただし，この問題を初見で解くというのは難しいかと思い

ます。物理工学科の専門科目では，こういった良く使用する公式の証明もおさえておきましょう。

(1)

$$\varepsilon_x = \frac{(R+z)d\theta - Rd\theta}{Rd\theta} = \frac{z}{R} \tag{89}$$

(2)

断面の中立軸から距離 z の位置に微小面積 dA をとると，dA に作用する力は，

$$\sigma_x dA = E\varepsilon_x dA = E\frac{z}{R}dA \tag{90}$$

となる。応力 σ_x の横断面全体での積分値が 0 となるとの問題文の仮定より，

$$\int_A \sigma_x dA = \frac{E}{R}\int_A z dA = 0 \tag{91}$$

$$\therefore \quad \int_A z dA = 0 \tag{92}$$

これより，中立軸の断面一次モーメントは 0 であることが示された。

(3)

$$\begin{aligned} M &= \int_A \sigma_x z dA = \frac{E}{R}\int_A z^2 dA = \frac{E}{R}\int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cdot b dz \\ &= \frac{2E}{R} b \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{h/2} = \frac{E}{R}\cdot\frac{bh^3}{12} \end{aligned} \tag{93}$$

(4)

$$M = \frac{E}{R}\int_A z^2 dA = \frac{EI_y}{R} \tag{94}$$

(5)

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cdot b dz = \frac{bh^3}{12} \tag{95}$$

(3)〜(5) の並べ方の意味が私には良く理解できないのですが。(3) には他の解法をあてはめるべきなのでしょうか。ここで与えた解答では (3) ですでに (4)，(5) が求まってしまっています。