京都大学編入学試験物理工学科専門　流体力学

京都大学高専会 (http://kyoto-u.jpn.org/)　k_s

2007 年 11 月 11 日

第 1 **版　平成** 19 **年** 11 **月** 11 **日**

平成 14 年度

連続の式（難易度：基本）

流体における質量保存則を定式化したものである。出題では小問に分かれており，非圧縮性流体から圧縮性流体という順番で解いているが，ここでは，圧縮性流体の連続の式で，密度が一定の場合が非圧縮性流体の連続の式とみなせることから導出していくことにする。

まず，辺の長さが dx,dy の微小要素では「単位時間当たりに流入した質量」と「流出した質量」の差は微小要素内の「質量増分」に等しい。このとき，x,y 方向の速度成分を u,v とすると，単位時間あたりに流入する質量 q_x,q_y は

$$q_x = \rho u dx, \qquad q_y = \rho v dy \tag{1}$$

流出する質量は,

$$q_{x+dx} = \left\{ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right\} dy, \qquad q_{y+dy} = \left\{ \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right\} dx \tag{2}$$

したがって，微小要素に残った流体質量は

$$q_x + q_y - q_{x+dx} - q_{y+dy} = -\left\{ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right\} dxdy \tag{3}$$

ところで，ある時刻 t における密度を $\rho(x,y,t)$ とすると，その要素内の質量は $\rho(x,y,t)dxdy$ である。微小時間 δt 秒後には，$\rho(x,y,t+dt)$ に変化するので，微小時間の質量増分は,

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\rho(x,y,t+dt)-\rho(x,y,t)}{\delta t} dxdy = \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdy \tag{4}$$

したがって，圧縮性流体の連続の式は,

$$-\left\{ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right\} dxdy = \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdy \tag{5}$$

$$\therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \tag{6}$$

非圧縮性流体の場合には $\rho =$const. なので

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{7}$$

平成 15 年度

運動方程式からエネルギー保存則の導出（難易度：基本）

(1)

完全流体 ： 粘性および圧縮性がない流体

力学法則 ： 運動量保存則

(2)

物質微分とは，同じ流体粒子の時間的変化（加速度）を示している。

ここで，$\partial u/\partial t$ は局所加速度，その他の項は対流加速度を示している。

(3)

ベルヌーイの定理

(4)

まず，流体粒子に働く体積力はポテンシャル $U = gy$ より，

$$f_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad f_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -g, \qquad f_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

したがって，オイラー方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} - g \tag{10}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \tag{11}$$

この式を書き換えると，

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2}\right) - v\frac{\partial v}{\partial x} - w\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2}\right) - u\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + g = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2}\right) - u\frac{\partial u}{\partial z} - v\frac{\partial v}{\partial z} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \tag{14}$$

ここで，

$$\boldsymbol{v} = (u, v, w), \qquad |\boldsymbol{v}| = q, \qquad \boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{15}$$

とすると，

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\left(\frac{q^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gy\right) = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} \tag{16}$$

となる。ところが，一本の流線に沿って考えるため $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = 0$ となる。流線方向 s とし，これを積分すると次式が得られる。

$$\frac{q^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + y + \frac{1}{g}\int_s \frac{\partial q}{\partial t} ds = \mathrm{const}\,. \tag{17}$$

定常の場合は，$\partial/\partial t = 0$ だから

$$\frac{q^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + y = \text{const}\,. \tag{18}$$

また，得られた各項の物理的意味は
$q^2/2g$ は速度ヘッドと呼ばれ，単位重量の流体の速度エネルギーを示す。
$P/\rho g$ は圧力ヘッドと呼ばれ，単位重量の流体の圧力エネルギーを示す。
y は位置ヘッドと呼ばれ，単位重量の流体の位置エネルギーを示す。
全体としては，流体の質量保存を示している。

ここまで，オイラー方程式からベルヌーイの定理を導出してきましたが，実際のテストでは証明せずに単に記述するだけでもよかったでしょう。

平成 16 年度

平行平板間の流れと運動方程式の無次元化（難易度：標準）

本問は，平成 14 年度の京都大学工学部物理工学科の流体力学基礎の定期試験で出題された問題の一部と完全に同じである。

(1)
連続の式 ： 質量保存
運動方程式 ： 運動量保存（本質的にこのことである ； 運動量の時間的変化率は力に等しい）

(2)
この速度分布は単純せん断流れ（**クエット流れ**）と圧力勾配による **2 次元ポアゼイユ流れ**との重ねあわせである。まず，条件を整理しておこう。

- 流れは x 方向のみ考えればよい。すなわち，$V = 0 \quad \therefore \partial V/\partial y = 0$
- 先の結果と連続の式より $\partial U/\partial x = 0$
- 定常流れであるから，$\partial/\partial t = 0$

これより，x 方向の運動方程式は次式となる。

$$\frac{dP}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \tag{19}$$

これを積分して U について解くと次のようになる。ただし，C_1, C_2 は積分定数とする。

$$\frac{dU}{dy} = \frac{1}{\mu}\frac{dP}{dx} y + C_1 \tag{20}$$

$$U = \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx} y^2 + C_1 y + C_2 \tag{21}$$

境界条件は,

$$y = H \text{ で } U = U_0, \qquad y = -H \text{ で } U = -U_0 \tag{22}$$

であるから,

$$C_1 = \frac{U_0}{H} \tag{23}$$

$$C_2 = -\frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx} H^2 \tag{24}$$

となる。したがって x 方向の流速分布 $U(y)$ は次のようになる。

$$U(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx} y^2 + \frac{U_0}{H} y - \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx} H^2 \tag{25}$$

- $dP/dx > 0, dP/dx < 0$ のときの式

$$U(y) = -\frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}\left(H^2 - y^2\right) + \frac{U_0}{H} y \tag{26}$$

$$\tau(y) = \mu \frac{du}{dy} = \frac{dp}{dx} y + \frac{\mu U_0}{H} \tag{27}$$

- $dP/dx = 0$ のときの式

$$U(y) = \frac{U_0}{H} y \tag{28}$$

$$\tau(y) = \frac{\mu U_0}{H} \tag{29}$$

したがって，これらの概形は次のようになる。

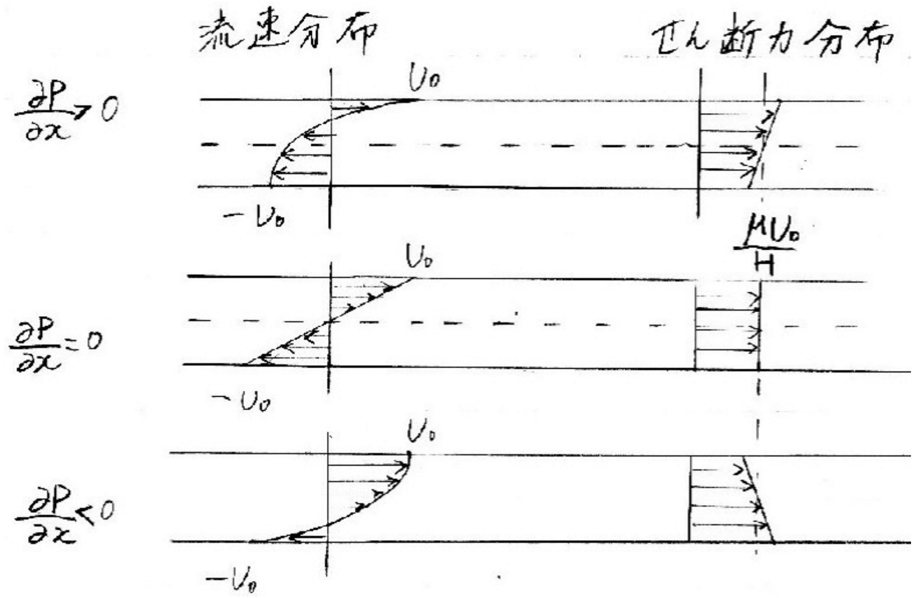

図 1　流速分布とせん断力分布

(3)

いま代表速度 u，代表長さ l とし，また動圧 ρu^2 を代表圧力とする。そこで，長さ，速度，時間および圧力に関する無次元数をそれぞれ次のようにおく。

$$x^* = \frac{x}{l}, \quad y^* = \frac{y}{l}, \quad u^* = \frac{U}{u}, \quad v^* = \frac{V}{u}, \quad t^* = \frac{tu}{l}, \quad p^* = \frac{P}{\rho u^2} \tag{30}$$

まず，x 方向について，これらを運動方程式に代入すると，

$$\frac{\partial uu^*}{\partial lt^*/u} + uu^*\frac{\partial uu^*}{\partial lx^*} + uv^*\frac{\partial uu^*}{\partial ly^*} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho u^2 p^*}{\partial lx^*} + \nu\left\{\frac{\partial^2 uu^*}{\partial (lx^*)^2} + \frac{\partial^2 uu^*}{\partial (ly^*)^2}\right\} \tag{31}$$

$$\frac{u^2}{l}\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{u^2}{l}u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{u^2}{l}v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{u^2}{l}\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\nu u}{l^2}\left\{\frac{\partial^2 u^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial (y^*)^2}\right\} \tag{32}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\nu}{lu}\left\{\frac{\partial^2 u^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial (y^*)^2}\right\} \tag{33}$$

ここで，レイノルズ数 $Re = lu/\nu$ を用いれば

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re}\left\{\frac{\partial^2 u^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial (y^*)^2}\right\} \tag{34}$$

y 方向についても同様に，

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re}\left\{\frac{\partial^2 v^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial (y^*)^2}\right\} \tag{35}$$

これより，運動方程式が無次元化でき，無次元数がレイノルズ数 Re であることが示された。ところで，上式の右辺第 2 項は粘性項と呼ばれ，粘性力を示している。したがって，Re の大小によって粘性力の大小を知ることができる（Re が大きいと粘性力は小さくなり，Re が小さいと粘性力は大きくなる）。

乱流では，慣性力が粘性力に比べて大きい。なぜなら，層流では粘性に支配され秩序正しく流体が流れているが，反面乱流では慣性力が勝っているからである。このことから，Re は層流から乱流への遷移を決定するパラメータとなりうることがわかる。

平成 17 年度

運動量保存，質量保存，エネルギー保存則の数学的考察（難易度：難）

(1)

質量保存の式は（圧縮性流体であることに注意せよ）

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial X} = 0 \tag{36}$$

運動量保存の式は

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial X} = -\frac{\partial P}{\partial X} \tag{37}$$

(2)

流速場，圧力場ともにつねに一様である。

(3)

本問の条件を整理すると

- 非粘性
- 非熱伝導性

ということである。本問のように一次元方向のみを考えた場合，その変数は X 方向の速度成分 u，密度 ρ，圧力 P および内部エネルギー e である（さらに一般には粘性もあるが，今回は非粘性なので考えなくて良い）。

ところが，今回は「非熱伝導性」であるから内部エネルギー e は一定となり定数としてよい。したがって，未知数は u, ρ, P の 3 つとなり線形代数の観点からも解は定まるといってよい。

なお，内部エネルギー e を変数として扱う場合，つまり熱の移動がある場合は熱伝導方程式など別の方程式も考慮しなくてはならない。

私の疑問は，A 君の疑問が「素朴」かどうかというところですけどね・・・

平成 18 年度

非定常流平行流れの運動方程式の解（難易度：難）

本問では，突然圧力勾配が課されたことを仮定しているが，突然平板を動かした場合を**レイリーの問題**と呼んでいる。

(1)

非圧縮性流体の連続の式より，

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{38}$$

したがって，運動方程式（暗記しておくこと）は x 方向の流れでかつ非定常なので

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial x} = -G\right) \tag{39}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{G}{\rho\nu} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial U}{\partial t} \tag{40}$$

(2)

定常なので (1) で求めた式で $\partial/\partial t = 0$ となるから

$$\frac{d^2}{dy^2}U(y,\infty) = -\frac{G}{\rho\nu} \tag{41}$$

これを積分すると次式が得られる。ただし C_1, C_2 は積分定数とする。

$$\frac{d}{dy}U(y,\infty) = -\frac{G}{\rho\nu}y + C_1 \tag{42}$$

$$U(y,\infty) = -\frac{G}{2\rho\nu}y^2 + C_1 y + C_2 \tag{43}$$

ここで $y = \pm a$ で $U(y,\infty) = 0$ であるから

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = \frac{Ga^2}{2\rho\nu} \tag{44}$$

と決定する。これより

$$U(y,\infty) = \frac{G}{2\rho\nu}\left(a^2 - y^2\right) \tag{45}$$

となることが示された。

(3)

(1) で求めた式に $U(y,t) = U(y,\infty) + V(y,t)$ を代入して，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{U(y,\infty) + V(y,t)\right\} = \frac{G}{\rho} + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{U(y,\infty) + V(y,t)\right\} \tag{46}$$

ここで，$t \to \infty$ のとき $U(y,t)$ の時間変化が無視できるから

$$\frac{\partial}{\partial t}U(y,\infty)=0 \tag{47}$$

さらに，(2) の $U(y,\infty)$ を 2 階微分して

$$\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}U(y,\infty)=-\frac{G}{\rho} \tag{48}$$

したがって，運動方程式は結局,

$$\frac{\partial V(y,t)}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 V(y,t)}{\partial y^2} \tag{49}$$

という熱伝導方程式の形となる。初期条件と境界条件は

$$t=0 \text{ で } V=-U(y,\infty) \tag{50}$$

$$y=\pm a \text{ で } V=0 \tag{51}$$

となる。

平成 19 年度

平行平板間の流れ（難易度：基本）

(1)

まず，条件を整理すると

- 定常であるから $\partial/\partial t=0$
- x 方向の流れであるから $v=w=0$
- 連続の式より $\partial u/\partial x=0$

となる。したがって x 方向の運動方程式は,

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{52}$$

$$\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{1}{\rho\nu}\frac{dp}{dx} \tag{53}$$

境界条件は,

$$y = D \text{ で } u = U, \qquad y = -D \text{ で } u = 0 \tag{54}$$

(2)

$\partial u/\partial x = 0$ より x 方向に変化しないことは明らか。

(3)

問題が不適切であると考えられる。なぜなら，圧力は x 方向に変化するからである。y, z 方向には変化しないが，これは運動方程式を考えていったときに y, z 方向では,

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{55}$$

となるからである。

(4)

(1) で求めた式を積分して

$$u = \frac{1}{2\rho\nu}\frac{dp}{dx}y^2 + C_1 y + C_2 \tag{56}$$

境界条件より,

$$C_1 = \frac{U}{2D}, \qquad C_2 = \frac{U}{2} - \frac{1}{2\rho\nu}\frac{dp}{dx}D^2 \tag{57}$$

これより流速分布は,

$$u = -\frac{1}{2\rho\nu}\frac{dp}{dx}\left(D^2 - y^2\right) + \frac{U}{2D}y + \frac{U}{2} \tag{58}$$

となる。

(5)

$$Re = \frac{4DU\rho}{\mu} = 2.0 \times 10^4 \tag{59}$$